un seul antécédent $\alpha \in]1,+\infty[$ par f et par suite l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in]1,+\infty[$.

b) On a $\begin{cases} f(1,44)\cdot f(2)<0 \quad et \\ f \text{ est continue sur } [1,44\ ;2] \end{cases}$ donc $1,44<\alpha<2$.

3°/ $f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x-1}=\sqrt{x} \Leftrightarrow x-1=\dfrac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=x$.

4°/a) On a $f(\alpha)=0 \Rightarrow 1+\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}=\alpha \Rightarrow g(\alpha)=\alpha$.

b) • g est définie, continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$\forall x \in]0,+\infty[,\ g'(x)=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}<0$ donc g est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et comme g est continue sur $]0,+\infty[$ donc g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur l'intervalle $J=]\lim\limits_{x\to+\infty} g(x), \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)[$.

or $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ donc $J=]1,+\infty[$.

c) $g^{-1}:]1,+\infty[\to]0,+\infty[$

$x \mapsto g^{-1}(x)=y$

$g^{-1}(x)=y \Leftrightarrow g(y)=x \Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{\sqrt{y}}=x \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{y}}=x-1 \Leftrightarrow$

$\sqrt{y}=\dfrac{1}{x-1} \Rightarrow y=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ d'où $\forall x \in]1,+\infty[,\ g^{-1}(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$.

Solution 7 :

1°/a) g est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}$,

$g'(x)=3x^2-2x+3 \quad \Delta'=-8<0$ donc $\forall x \in \mathbf{R},\ g'(x)>0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$